

Introduzione

Il corso di Meccanica Razionale nelle Facoltà di Scienze e di Ingegneria è sempre stato, per collocazione didattica e per sua natura, un corso di congiunzione tra discipline diverse. Negli ultimi anni, per vari motivi, appare crescente l'opportunità di introdurre in esso in modo più esplicito una trattazione dei sistemi differenziali, da cui l'idea del presente testo "Sistemi di equazioni differenziali ordinarie".

Di fronte alla necessità di sviluppare in modo organico questa teoria in connessione con lo studio della meccanica, si è concepito un testo che affiancasse all'usuale analisi rigorosa delle proprietà di base delle equazioni differenziali un'ampia selezione di esempi significativi, volti a guidare lo studente nell'applicazione della teoria alla pratica dei problemi meccanici.

Dal punto di vista espositivo, si è scelto di adottare uno stile che coniugasse il rigore formale con un approccio discorsivo, mirato a illustrare alcune delle intuizioni concettuali che sottendono l'analisi rigorosa sviluppata nel testo.

Si è assunta la conoscenza approfondita da parte del lettore degli argomenti trattati nei corsi di Analisi I e II, Algebra, Geometria e Fisica I, solitamente affrontati nel primo anno dei corsi di laurea delle Facoltà di Scienze e Ingegneria. Una rassegna sintetica di alcune nozioni più avanzate, ma comunque propedeutiche alla piena comprensione del contenuto, è stata però inserita nelle appendici.

Il volume, quindi, si propone di fornire una trattazione organica dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, con un'enfasi particolare sulle applicazioni alla meccanica. L'esposizione mira ad affiancare rigore matematico e intuizione, combinando risultati teorici generali con esempi e modelli tratti dalla pratica fisica e ingegneristica. L'intento didattico è quello di accompagnare lo studente in un percorso che, partendo da casi semplici, si sviluppa progressivamente verso strumenti più astratti e più vasta applicabilità.

In quest'ottica, il primo capitolo introduce i concetti fondamentali della teoria attraverso lo studio delle equazioni del primo ordine in una variabile. Dopo la discussione dei risultati fondamentali di esistenza e unicità delle soluzioni del problema di Cauchy, lo studio si incentra sull'analisi qualitativa delle soluzioni dei sistemi dinamici unidimensionali nel piano delle fasi esteso e sul concetto di stabilità dei punti fissi. Tutte le dimostrazioni vengono proposte con argomenti che sfruttano il carattere unidimensionale del problema trattato e che, pertanto, risultano più semplici e concrete per il lettore meno esperto. La dimostrazione dell'esistenza di soluzioni nel caso generale è comunque tecnicamente piuttosto delicata.

Il secondo capitolo amplia il contesto allo studio dei sistemi di equazioni differenziali. Viene analizzato il problema di Cauchy in tutta la sua generalità, introducendo strumenti fondamentali per affrontare questioni di esistenza, unicità e massimalità delle soluzioni.

Nel terzo capitolo viene affrontata la teoria dei sistemi lineari, con particolare attenzione al caso dei sistemi di equazioni a coefficienti costanti. Vengono proposte diverse tecniche di soluzione, incentrate sulla costruzione della matrice risolvente canonica, sia per i sistemi omogenei che per quelli non omogenei.

Il quarto capitolo è dedicato allo studio del comportamento a tempi lunghi delle soluzioni dei sistemi autonomi. Si introducono i concetti chiave di equilibrio e di stabilità e, dopo l'analisi del caso lineare, si sviluppa la teoria di Liapunov. Chiudono il capitolo alcuni paragrafi dedicati all'applicazione della teoria ai sistemi meccanici.

Il quinto capitolo approfondisce lo studio qualitativo dei sistemi planari, includendo casi notevoli come i sistemi meccanici conservativi, i sistemi gradiente e quelli dotati di un integrale primo. Il capitolo si conclude con lo studio degli insiemi limite e con una trattazione completa del Teorema di Poincaré–Bendixson, fondamentale per comprendere la dinamica nei sistemi bidimensionali.

Completano il volume le appendici, di cui si è già detto, e l'indice analitico, che funge da strumento complementare al sommario iniziale. I riferimenti contenuti nel sommario non sono ripetuti all'interno dell'indice analitico.

L'occasione per concretizzare l'idea di questo libro è stata la riorganizzazione del corso di Modelli Matematici per la Meccanica del Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale presso Sapienza Università di Roma. Tradizionalmente focalizzato sullo studio della meccanica razionale, il corso è stato ristrutturato includendo un modulo dedicato ai Sistemi Dinamici e l'altro alla Meccanica Razionale. Gli autori ringraziano il Professor A. Barra, codocente del Corso, per aver riletto in modo approfondito e completo il testo e per aver segnalato errori di battitura e alcune imprecisioni.

Roma, giugno 2025

D. Andreucci, E.N.M. Cirillo