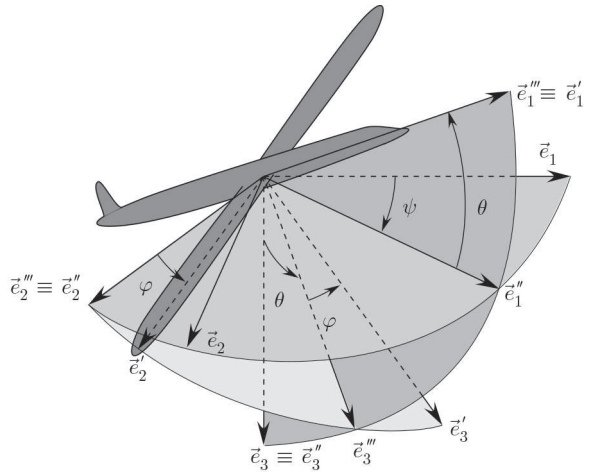


Figura 1.3. Definizione degli angoli di Cardano.

Si supponga $\vec{e}_1' \times \vec{e}_3 \neq 0$ (i due versori non sono paralleli). Si definisce angolo di **imbardata**, e si indica con $\psi \in [0, 2\pi)$ la sua ampiezza, l'angolo del piano coordinato 1-2 del riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ di vertice O con primo e secondo lato rispetto a $\vec{e}_3$ individuati rispettivamente da $\vec{e}_1$ e dalla proiezione di $\vec{e}_1'$ sullo stesso piano 1-2. L'angolo di imbardata non sarebbe ben definito, se fosse violata la condizione $\vec{e}_1' \times \vec{e}_3 \neq 0$. Si chiama **linea dei nodi** la retta passante per O e individuata dal versore $\vec{n} = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1'/|\vec{e}_3 \times \vec{e}_1'|$ detto **versore della linea dei nodi**. La linea dei nodi è anche la retta ottenuta intersecando il piano 1-2 del riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ con il piano 2-3 del riferimento $\{O, \vec{e}_i'\}$. La linea dei nodi è una retta del piano 1-2 del riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ ed è perpendicolare all'asse 1 del riferimento $\{O, \vec{e}_i'\}$, pertanto, è perpendicolare anche alla proiezione dell'asse 1 del riferimento $\{O, \vec{e}_i'\}$ sul piano 1-2 del riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$. Pertanto, l'angolo individuato dalla linea dei nodi e dall'asse 2 del riferimento $\{O, \vec{e}_i\}$ ha ampiezza pari a quella dell'angolo di imbardata.

Si definisce angolo di **beccheggio**, e si indica con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ la sua ampiezza, l'angolo di vertice O con primo e secondo lato rispetto al versore della linea dei nodi individuati rispettivamente dalla proiezione di $\vec{e}_1'$ sul piano 1-2 e dallo stesso $\vec{e}_1'$. L'angolo di **rollio** è l'angolo del piano coordinato 2-3 del riferimento $\{O, \vec{e}_i'\}$ di vertice O con primo e secondo lato rispetto a $\vec{e}_1'$ individuati da $\vec{n}$ e $\vec{e}_2'$. La sua ampiezza viene indicata con $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Per esprimere la matrice Γ del cambiamento di base $\vec{e}_i' = \Gamma_{ij}\vec{e}_j$ in termini degli angoli di Cardano si procede all'introduzione di sistemi di riferimento intermedi. Si considera il riferimento $\{O, \vec{e}_i''\}$ ottenuto mediante la rotazione di ampiezza ψ attorno a $\vec{e}_3$ in verso antiorario, ovvero si pone

$$\vec{e}_1'' = \cos\psi\vec{e}_1 + \sin\psi\vec{e}_2, \quad \vec{e}_2'' = -\sin\psi\vec{e}_1 + \cos\psi\vec{e}_2 \quad \text{e} \quad \vec{e}_3'' = \vec{e}_3$$

(esempio 1.1 e illustrazione a sinistra nella figura 1.4). Si osserva che $\vec{e}_2'' = \vec{n}$.